Coulomb-en legea

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\,\vec{u}_r$$

$$k = 9\cdot 10^9 \frac{N m^2}{C^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

ε_0 → hutsaren permitibitatea

Gainezarmenaren printzipioa:

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$
$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ } Bektorialki

Eremu elektrikoa

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} \qquad E = \frac{F}{q} \qquad F = qE$$

Gainezarmenaren printzipioa:

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$
$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ } Bektorialki

Karga banaketa jarraituak

Luzera unitateko karga $\left(\frac{C}{m}\right)$: $\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$

Azalera unitateko karga $\left(\frac{C}{m^2}\right)$: $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}$

Bolumen unitateko karga $\left(\frac{C}{m^3}\right)$ $\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$

Fluxua

Gainazal bat zeharkatzen duten eremu lerroen kopuru netoa.

$\Phi = (A, \theta, \vec{v})$

$E\uparrow \rightarrow EL\uparrow \Rightarrow \Phi\uparrow$

$A\uparrow \Rightarrow \Phi\uparrow$ → A zabala bada

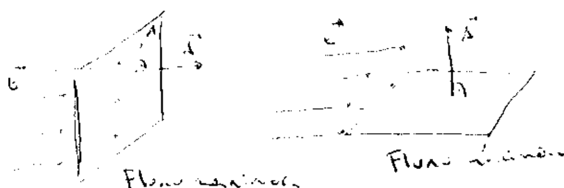
$\Phi = kte$ → A itxia bada

$\theta \begin{cases} \vec{A} \parallel \vec{E} = \Phi_{max} \\ \vec{A} \perp \vec{E} = \Phi_{min} \end{cases}$

E = kte. $\Rightarrow \Phi = E A \cos\theta \Rightarrow \mathbf{\Phi = \vec{E}\cdot\vec{S}}$
$\vec{A} = \vec{S}$

E ≠ kte. $\Rightarrow d\Phi = \vec{E}\,\vec{dS}$; $\mathbf{\Phi = \int_S \vec{E}\cdot\vec{dS}}$

Integratzea zati infinitesimal guztietako fluxuen batura da.





! Nahiz eremua aldatzen joan azalera itxian $\vec{dS}$ beti kanpo aldera doala.

Gauss-en legea

$\Phi = \oint_S \vec{E}\,\vec{dS}$ ez da erraza kalkulatzen ahal izateko ezinbestekoa delako $\vec{E}$ eta $\vec{dS}$ arteko biderkaketa eskalarra egin ahal izatea. Ezkon, aldagaiak alde batera utzita. Hau da, ezin da espresioa ez konplexua izan.

Simetria egokia denean bakarrik erabil daiteke integrala.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\,4\pi r^2 = \frac{Q_{bar}}{\varepsilon_0} \qquad \Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{(\lambda r)^2}\,4\pi(\lambda r)^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Gainazala edozein dela ere, zeharkatzen duten eremu lerro kopurua unibertsala mantentzen da. Beraz fluxu berdina izango da.

Hari eroalea

Bide matematikoa jarraituz, Coulomb-en legea: $E = \frac{2k\lambda}{y}\cdot\frac{1/2\, L}{\sqrt{(1/2\, L)^2+y^2}}$

→ $y >> L$ karga puntual bezala ikusten dugu

$$E = \frac{2k\lambda}{y}\,\frac{1/2\, L}{\sqrt{(1/2\, L)^2+y^2}} \sim \frac{2k\lambda}{y}\cdot\frac{1/2\, L}{y} = \frac{k\lambda L}{y} = k\frac{Q}{y^2}$$

(Gainazal gaussiar esferikoa erabili dezakegu)

$$\Phi = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda L}{r^2}$$

→ $y << L$ hari infinitu bezala ikusten dugu

$$E = \frac{2k\lambda}{y}\cdot\frac{1/2\, L}{\sqrt{(1/2\, L)^2+y^2}} \sim \frac{2k\lambda}{y} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

(Gainazal gaussiar zilindrikoa erabili dezakegu)

$$\Phi = E\cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Eraztuna

Bide matematikoa jarraituz, Coulomb-en legea: $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

→ $x >> a$ karga puntual bezala ikusten dugu

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \sim \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{x^2} = k\frac{Q}{x^2}$$

→ $x << a$ elkar anulatu egiten dira indar guztiak

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x^{\to 0}}{(x^2+a^2)^{3/2}} \sim E = 0$$

Disko zirkularra

Bide matematikoa jarraituz, Coulomb-en legea: $E = 2\pi k\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$

→ $x << R$ plano infinitu bezala ikusten dugu

$$E = 2\pi k\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) \sim E = 2\pi k\sigma = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

(Gainazal gaussiar zilindrikoa erabili dezakegu)

$$\Phi_{1/2} = \oint E\, ds\cdot\cos\alpha^{\,1} \qquad \Phi = 2ES$$

$$\Phi = \frac{Q_{bar}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = 2ES \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Gainazal esferikoa

→ $r > R$

$$\Phi = \oint E\, ds\cos\alpha^{\,1} = ES = E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

Potentzial elektrikoa

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

! Hasierako eta bukaerako posizioen menpe dago, ez du ibilbidearekiko menpekotasunik. Ibilbide itxi batean $w = 0$

$$W_A^B = -\Delta U = -(U_B - U_A) = (U_A - U_B) \quad \text{(energia potentziala)}$$

$$W_A^B = \Delta E_K = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad \text{(energia zinetikoa)}$$

Energia mekanikoaren kontserbazioaren printzipioa

$$E_{mA} = E_{mB}$$

$$E_{KA} + E_{PA} = E_{KB} + E_{PB}$$

→ Lana potentzialarekin (energia) konparatu eta integratu

$$-\Delta U = \int_A^B \vec{F}\,\vec{dr} = \int_A^B F\,dr = \int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\,dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_A^B = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

$$-(U_B - U_A) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

Baldin $U_B = 0$; $r_b = \infty$ $\Rightarrow$ $U_A = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_a}$

Baldin $U_B = 0$; $r_b = r_b$ $\Rightarrow$ $U_A = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$

→ Potentzial elektrikoa

Baldin $V_B = 0$, $r_b = \infty$ $\Rightarrow$ $V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_a}$

! Gainezarmen printzipioari jarraituz puntu bateko potentzial elektrikoa kalkulatzeko inguruko kargek sortzen dituztenak batu behar dira.

Baldin $V_B = 0$; $r_b = r_b$ $\Rightarrow$ $V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$

$$W_A^B = q\,(V_A - V_B)$$

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F_e}\,\vec{dr} \;,\quad \frac{W_A^B}{q} = \int_A^B \underbrace{\frac{\vec{F_e}}{q}}_{E}\,\vec{dr} \;;\quad V_A - V_B = -\Delta V = \int_A^B \vec{E}\,\vec{dr}$$

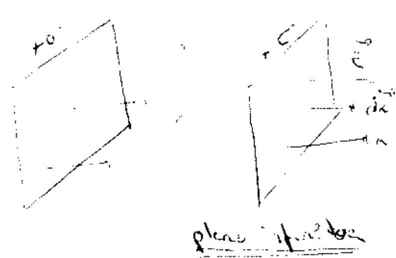
Gradientea

$$dW_A^B = \underbrace{\vec{F}}_{q \cdot \vec{E}}\,\vec{dr} \;;\quad dW_A^B = -q\,dv \;;\quad q\,\vec{E}\,\vec{dr} = -q\,dv \;,\quad \vec{E} = -\frac{dv}{dr}$$

$$\int_A^B dv = -\int_A^B k\,\frac{Q}{r^2}\,\vec{dr} = -kQ\int_A^B \frac{dr}{r^2} = -kQ\left[\frac{-1}{r}\right]_A^B = -kQ\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

Baldin $V_B = 0$, $r_b = \infty$ $\quad V_A = k\,\frac{Q}{r_a}$

Karga banaketa jarraia



$$dv = -\vec{E}\cdot d\vec{x} \quad , \quad \int_A^B dv = -\int_A^B \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_A^B dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[x]_A^B$$

Baldin $V_B = 0$, $x_B = \infty$ $\quad V_A = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x_a$



$$dv = -\vec{E}\cdot d\vec{r} \; ; \; \int_A^B dv = -\int_A^B \vec{E}\,d\vec{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln r]_A^B$$

Baldin $V_B = 0$; $r_B = 1$ $\quad V_A = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_a$

Momentu dipolar elektrikoa

$\vec{p} = q\,\vec{l}$ $\qquad$ $\ominus$ —— $\vec{l}$ —— $\oplus$

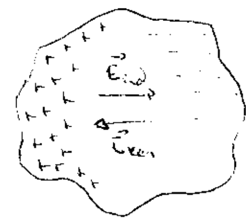
! Negatibotik positibora orientatuta dago

$\vec{M} = \vec{p}\wedge\vec{E}$ → biraketa bektoriala

$\vec{M} = 0$ oreka $\begin{cases} \theta = 0^\circ \rightarrow \text{oreka egonkorra} \\ \theta = 180 \rightarrow \text{oreka ezegonkorra} \end{cases}$

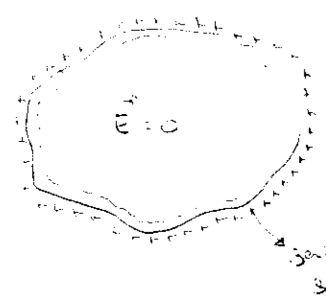
Indukzioa

Edozein eroaleri kanpotik eremu bat aplikatzean, oreka apurtuko da, eta elektroiak mugitu egingo dira. Honi indukzio prozesua deritzo.



$\vec{E}_{ind} + \vec{E}_{kan} = 0 \rightarrow$ oreka

Kanpoko eremua eta induzitua berdintzean, oreka posizio berri bat izango dugu.

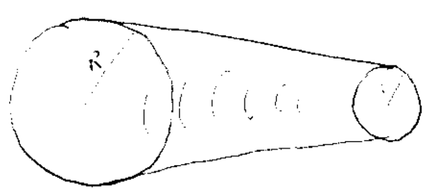


$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

$$\Phi = \frac{Q_{barne}}{\varepsilon_0} = 0 \rightarrow Q_{barne} = 0$$

! Gehiegizko karga bat gainazalean egongo da.

Konduktoreen arteko kargabanaketa



$V_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ $\qquad$ $V_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

oreka $\Rightarrow V_R = V_r \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{q}{r}$

$\sigma_R = \frac{Q}{4\pi R^2}$ $\qquad$ $\sigma_r = \frac{q}{4\pi r^2}$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{Q/R^2}{q/r^2} = \frac{Q/R \cdot 1/R}{q/r \cdot 1/r} = \frac{r}{R}$$

($Q/R = V_R 4\pi\varepsilon_0$, $q/r = V_r 4\pi\varepsilon_0$)

$\sigma_R = \sigma_r \frac{r}{R}$

$\sigma_R < \sigma_r$

$E_R < E_r$

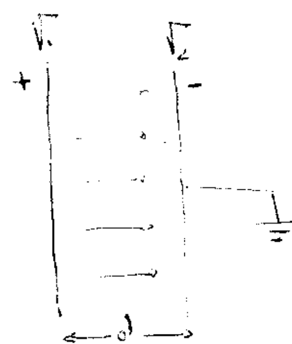
! Fenomeno honi PUNTA EFEKTUA deritzo

! Alde zorrotzetan karga gehiago metatuko da, eta, [illegible] begira.

Kondentsadore baten Kapazitatea

Diskoak

$dV = -\vec{E}\,d\vec{x}$; $\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_0^d -E\,dx = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^d dx = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}[x]_0^d$



$$V_2 - V_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \quad \text{Baldin } \begin{matrix} V_2 = 0 \\ x = d \end{matrix} \quad V_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

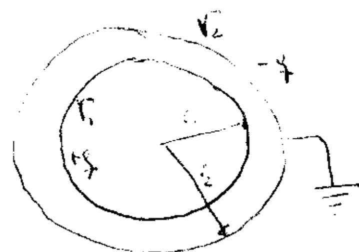
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

! Unitatean faradiotan

Esferak

$$dV = -\vec{E}\,d\vec{r} \; ; \; \int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\text{Baldin } \begin{matrix} V_2 = 0 \\ x = r_2 \end{matrix} \quad V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$$

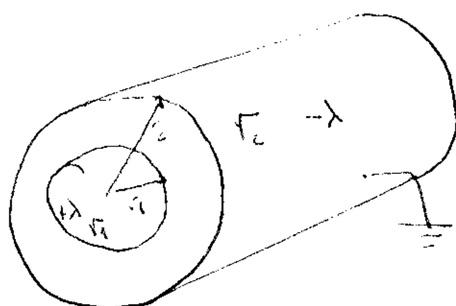
Zilindroak

$$dV = -\vec{E}\,d\vec{r} \; , \; \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln r]_{r_1}^{r_2}$$

$$V_2 - V_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_2 - \ln r_1) \quad \text{Baldin } V_2 = 0 \quad V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_2 - \ln r_1)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_2 - \ln r_1)} = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{(\ln r_2 - \ln r_1)}$$

Luzera unitateko kapazitatea: $\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{(\ln r_2 - \ln r_1)}$



Kondentsadore batean metatutako energia

$$dU = V\,dq \;;\; \int_0^U dU = \int_0^Q V\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{2C}\left[q^2\right]_0^Q$$

$$U - 0 = \frac{1}{2C}Q^2 \;;\; \mathbf{U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}} \qquad \left[C = \frac{Q}{V} \;;\; Q = CV \;;\; V = \frac{Q}{C}\right]$$

Energia dentsitatea

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \;;\; V_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \;,\; V = E \cdot d$$

$$U = \frac{\varepsilon_0 \, S \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d\right)^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 S \sigma^2 d^2}{2d\varepsilon_0^2} = \frac{\sigma^2 S d}{2\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 S E^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 E^2 (Sd)}{2}$$

$$\mu = \frac{U}{bol.} \qquad \mu = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Sd)}{(Sd)}$$

$$\mu = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Konstante dielektrikoa

ε_r : konstante dielektrikoa edo permitibitate erlatiboa

$$\varepsilon_r = \frac{E_{plaka}}{E_{osoa}} = \frac{E_{plaka}}{E_{plaka} - E_{ind.}}$$

Dielektrikoa sartzean: $\varepsilon_r > 1$

Hutsean: $\varepsilon_r = 1$

Eroaleetan: $E_{plaka} - E_{ind} = 0$; $E_{plaka} = E_{ind}$; $\varepsilon_r = \infty$

$$E_{osoa} = \frac{E_{plaka}}{\varepsilon_r}$$

$$E_{ind} = E_{plaka}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = E_{osoa}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)$$

Kargatu ondoren dielektrikoa sartzea

$Q_0 \longrightarrow Q = Q_0$

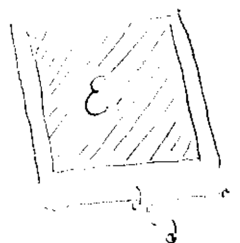
$E_0 \longrightarrow E = E_0/\varepsilon_r$

$E_0 d_0 = V_0 \longrightarrow V = E \cdot d = \frac{E_0}{\varepsilon_r} d_0 = V_0/\varepsilon_r$

$Q_0/V_0 = C_0 \longrightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_0}{V_0/\varepsilon_r} = \varepsilon_r \frac{Q_0}{V_0}$

a) Q_0, C_0 — d_0 — V_0

b)



! Plaketan dugun karga ez da aldatuko. Eremua, ordea, konstante dielektrikoaren formulak adierazten digunez txikitu egingo da. Horren ondorioz berdina gertatuko zaio potentzialari. Kapazitatea, ordea, alderantziz proportzionala digunez handitu egingo da, potentziala txikiagotu arren karga berdina baita.

Bateriaa k-ektatuta kondentsadorean dielektrikoa sartzen

(a) Q_0, C_0, (V)

(b) ε_r, (V)

$Q_0 \longrightarrow \varepsilon_r \cdot Q_0 = Q$

$E_0 \longrightarrow E = E_0$

$V_0 \longrightarrow V = V_0$

$C_0 \longrightarrow C = Q/V = \frac{\varepsilon_r \cdot Q_0}{V_0} = \varepsilon_r C_0$

! Bateriak konektatuta egiten jarraitzen duenez, potentziala konstantea izango da. Hori izan nahi da, induzitutako karga konpentsatzeko, karga handiagoa izango dugula. Eremu osoa hasierakoa berdina izango da, potentzial diferentzia ez baitu aldatu. Kapazitatea ε_r-ren funtzioan handitzen da, potentzial berdinean karga gehiago baitu.

Kondentsadoreen arteko elkarketak

Paralelo-elkarketa

$Q_1 = C_1 \cdot V_1$

$Q_2 = C_2 \cdot V_2$ $\qquad V_1 = V_2$

$Q_{ab} = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot V + C_2 \cdot V = V(C_1 + C_2)$

$C_{bal} = \frac{Q_{osoa}}{V} = C_1 + C_2 = C_{bal}$

a, b, V, C_1: $+Q_1$, $-Q_1$; C_2: $+Q_2$, $-Q_2$

Serie-elkarketa

a, $+Q_1$, $-Q_1$, $+Q_2$, $-Q_2$, b, V_1, V_2, induzitua

$V_1 = \frac{Q_1}{C_1}$; $V_2 = \frac{Q_2}{C_2}$ $\qquad Q_1 = Q_2$

$V_{ab} = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$

$C_{bal} = \frac{Q_{osoa}}{V} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$; $\frac{1}{C_{bal}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Korronte elektrikoa

$n = \frac{e^- \text{ kop.}}{m^3}$ $\qquad$ **A**: sekzio transbertsala

Elektroien korrontea: Kableen sekzio transbertsalean zehar denbora unitatean pasatzen diren elektroiak **(i)**

$i = n A v_d$

Desplazamendu abiadura: $v_d = \mu \cdot E$ ⊕ ; $v_d = -\mu \cdot E$ ⊖

Higikortasuna: erlazio proportzionala ; -tzen duen material batek elektroiak batetik pasatzeko **(μ)**

Korrontearen intentsitatea: Coulomb kopurua, edo elektroi kopurua ; material batek eroan dituen elektroiak neurtu **(I)**

! I positiboen norantzan mugitzen dela hartzen da.

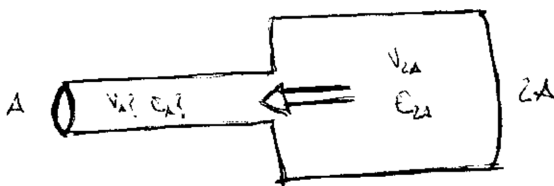
$I = q n A v_d$

$$n\left(\frac{e^-}{m^3}\right) A \cdot v_d \, \Delta t (m^3) = n \, A \, v_d \, \Delta t (e^-) \qquad i = \frac{n A v_d \Delta t}{\Delta t}$$

! Elektroiek momentuen batean pilatu egiten badira, eremuan birbanaketak eremu handiagoa sortuko du. Horrek sortu nahi duten gehiegizko elektroiei aurkako gingo die eta atera nahi dutenei lagunduko. Aldaketa oso indarren orekar sortzetik du laster.

Pilaketak berehalaren, falta baldin badira, berdin ere bilatuko luke eremu horrek tentsioa, sortu nahi dutenek eramango erakarriz, eta atera nahi dutenak baztertu.

Sekzioen murrizketa



$$i = n \, A \, v$$

$$i_A = i_{2A} \qquad n \, A \cdot v_A = n \cdot 2A \cdot \frac{1}{2} v_A$$

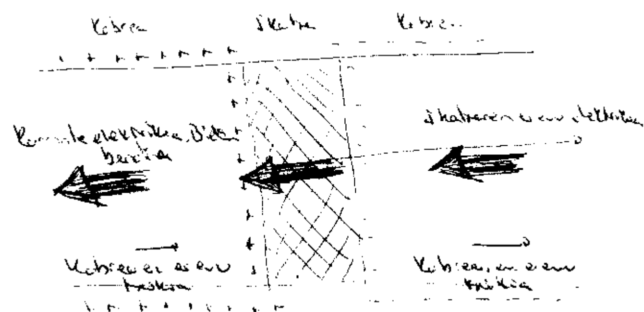
$$v_A = 2 v_A \qquad v = U \, E \qquad E_A = 2 E_{2A}$$

! Egoera egonkorra izan dadin i berdina izan behar dugu bi sekzioetan. Beraz, elektroiak pilatuko lirateke.

Erresistentzien tartekatzea

! Abiadura berdina izango dugu i berdina mantentzeko, ispilaera ez baita aldatu. Ordea, U ez berdineko materialak izanik, eremua handiagoa izango da.

$$n \cdot A \, v = n \, A \, v \qquad v = U_1 \cdot E_1 \; ; \; v = U_2 \cdot E_2$$



$\vec{B}_L$, $\vec{B}_{lurr}$, $\vec{B}_{nena}$, d

$$tg\,\theta = \frac{B_{nena}}{B_L} \rightarrow B_{nena} = B_L \cdot tg\,\theta$$

! Eremu magnetikoa distantziarekin gutxiagotzen da, gutxi gora behera $B \propto \frac{1}{d^3}$ eta ...

! Eremu magnetikoan kargak daude, ipar polotik atera eta hego polora sartzen dira, eremu elektrikoan, aldiz, irekiak dira

! Lerroak irudian bakoitzak ... ditu

! Ez da monopolo magnetikorik aurkitu, dipolorik dira guztiak.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{bar}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_M = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

! Fluxua nulua dago gainazal itxi batean, sartzen diren lerro guztiak berriro ere ateratzen baitira.

Biot eta Savart

Baldin $r \uparrow \rightarrow B \uparrow$

" $q \uparrow \rightarrow B \uparrow$

" $r \uparrow \rightarrow B \downarrow$

Karga puntuala higitzean

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{V} \wedge \vec{U}_r}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qV}{r^2}$$

μ_0 hutsaren permeabilitatea

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}$

n: Bolumen unitateko karga kopurua

A: sekzio trans. azalera

dl: korronte elementuaren luzera

$n \cdot A \cdot dl$: korronte elementuaren karga osoa

$$d\vec{B} = n \cdot A \cdot dl \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{V} \wedge \vec{U}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,d\vec{l} \wedge \vec{U}_r}{r^2}$$

$\vec{V} \parallel d\vec{l}$ — korronte elementua

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{y} (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

Baldin $y \ll l$, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ → hari infinitua $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{y}$

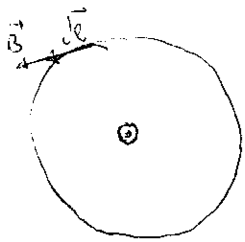
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi a^2 I}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Baldin $x = 0$ (zentroan) $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2a}$

Baldin $x \gg a$ $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi a^2 I}{x^3}$

dipoloa

$I d\vec{l}$, $d\vec{B}$, dB_y, dB_x



Zirkulazioa

$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = B\oint_c dl = B\,2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

B kons.

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}| = a\cdot b\cdot \sin\theta$$
$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = a\cdot b\cdot \cos\theta$$

Ampère

! Zirkulazioa eta bardin da kutxean itxura zeinden, Gaussekin gertatu bezala, ematen bardin izango dugu.

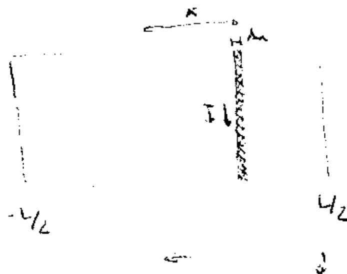
! Korronteak ibilbidetik kanpo egoteko, ibilbidearen aurka sartzeko, orduan elkar anulatuko dira.

$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum I$$

$B_{kons.}$ — barnekoak — itxura funtzioa kanpoko

! Zirkulazioa kalkulatzeko, norantza positiboa aukeratu dugu, eta horren funtzioan barrukoak zeinu egokiarekin kalkulatu.

Solenoidea (Biot eta Savart)



P → ΔB_x

$$\Delta B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{2\pi a^2 I}{[(d-x)^2+a^2]^{3/2}}\;\frac{N}{L}\cdot\Delta x$$

Luzera unitateko espira kopurua: N/L

Δx luzeran dauden espira kopurua: $\Delta x\,N/L$

$$B_{osoa} = \frac{\mu_0 2\pi a^2 I N}{4\pi L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dx}{[(d-x)^2+a^2]^{3/2}}$$

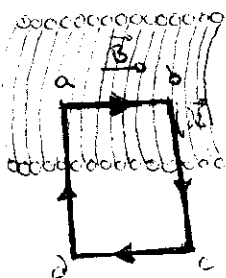
Baldin $a \ll L$ eta $d=0$

$$B_{osoa} = \mu_0 n I$$

Baldin $a \ll L$ eta $d \begin{cases} L/2 \\ -L/2 \end{cases}$

$$B_{osoa} = \frac{1}{2}\mu_0 n I$$

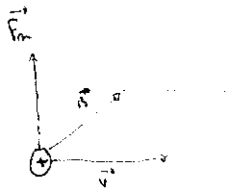
Solenoidea (Ampère)



$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_a^b \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_b^c \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_c^d \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_d^a \vec{B}\cdot\vec{dl} = BL$$

$\vec{B}\parallel\vec{dl}$ — $\vec{B}\perp\vec{dl}$ — $B=0$ — $\vec{B}\perp\vec{dl}$

$$B\cdot d = \mu_0 \sum I\,\frac{N}{L}\cdot d = \mu n I$$



$\vec{F_m} \perp \vec{v}$

- Indar magnetikoak abiaduraren norabidea aldatzen du, ez modulua.
- Indarrak abiadurarekiko elkartzutak dira

$$\vec{F_m} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$F_m = q v B \sin\theta$$

$\vec{B} = 0$, $\vec{v} = 0$, $\vec{B} \parallel \vec{v}$ → ez dago indarrik

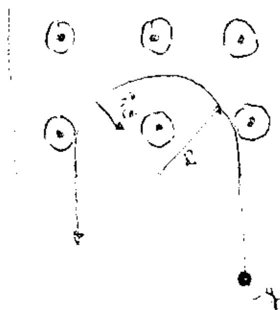
$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{1}{2} m V_o^2 = 0$$

$$V_f = V_o$$

$$W = \int \vec{F_m} \cdot \vec{ds} = 0$$

$$\vec{F_m} \perp \vec{ds}$$

- Indar magnetikoak eragindako lana nulua da eremu magnetiko egonkor baten barruan



$$F = m \cdot a_n = m \frac{V^2}{R}$$

$$F_m = q V B \sin\theta$$

$$m \frac{V^2}{R} = q V B$$

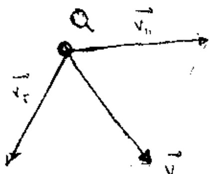
Lo zentrozko indarra

$$R = \frac{m V}{q B}$$

- Higidura zirkularra dugu partikula bat eremu uniforme batean $\vec{v}$ abiaduraz elkartzutez sartzen bada.

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m v}{v q B} = \frac{2\pi m}{q B}$$

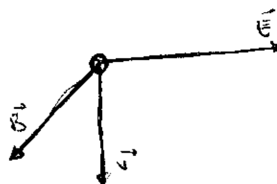
- Periodoa ez dago abiaduraren menpe: partikula eremuan barrena mugitzen bada ere, bere abiadura handitzean ibilbidearen erradioa handituko litzateke.



- Abiadura eta eremua paraleloak ez badira, partikularen higidura helikoidala litzateke. Indarrak abiaduraren osagai paraleloa eta elkartzuta aldaraziko ditu.



- Eremu magnetiko eta elektriko uniformeak elkarren artean elkartzutak badira, $\vec{v}$ abiaduradun partikula desbideratu gabe pasatuko da, eremu biek eragindako indarrak berdinak direnean.



$$\vec{F_e} = q \vec{E}$$

$$\vec{F_m} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$F_e = F_m$$

$$q E = q V B$$

$$V = E / B$$

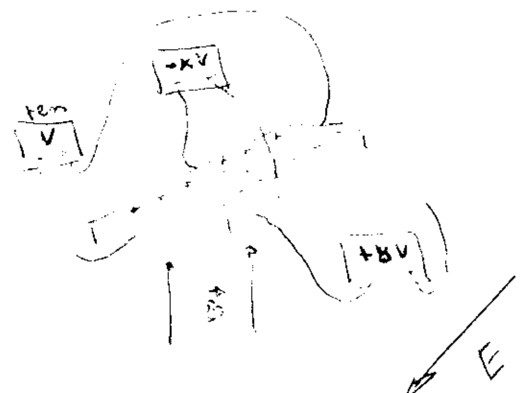
Hall efektua

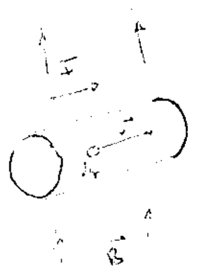
$$F_H = F_m$$

$$q E_H = q V B$$

$$V = E_H / B$$

- momentu horretan kargak desbideratzeari uzten diote





$d\vec{F} = dq\,\vec{v} \times \vec{B}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

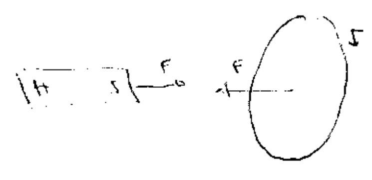
$I = \frac{dq}{dt}$

$d\vec{F} = I\,dt\,\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}$

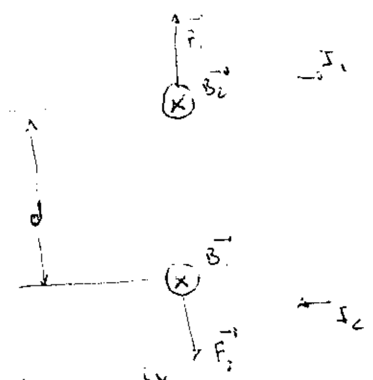
$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$

$\vec{F} = \int I\,d\vec{l} \times \vec{B}$ $\quad \mathbf{F} = I\,\vec{L} \times \vec{B}$

$B = kte$
$I = kte$



! Eremu [illegible] elektrikoan gertatu bezala, magnetikoan ere [illegible] eroaleak [illegible] eragiten dira.



$\vec{F}_1 = I_1 \vec{L} \times \vec{B}_2$ $\quad F_1 = I_1 L B_2 \sin 90° = I_1 L B_2$

$\vec{F}_2 = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_1$ $\quad F_2 = I_2 L B_1 \sin 90° = I_2 L B_1$

$F_1 = I_1 L \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}$ $\quad F_2 = I_2 L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$

Espirak eremu magnetikoan



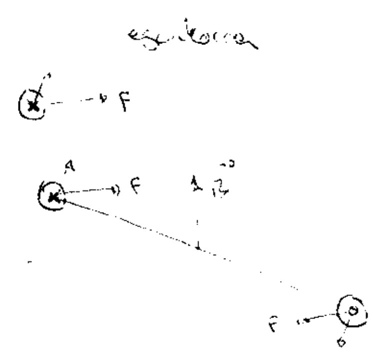
$\sum \vec{F} = \vec{0}$

$\vec{M} = \vec{0}$

oreka



egonkorra



ezegonkorra

$\vec{M}$ $\quad \vec{M}$

I $\quad$ I $\quad$ I

! Oreka egonkorra B eta M paraleloak direnean ematen da, antiparaleloak badira, ezegonkorra [illegible].

! Sistemak, espirak egoera egonkorrera joateko joera du.

Indukzio elektromagnetikoa

B → (I konstante)

$I = kte$

$\vec{F}_e = \vec{0}$

$\vec{F}_m = \vec{0}$

E_c:
- E lerroak +Q-tik -Q-ra
- $\oint \vec{E}_c \cdot \vec{dl} = 0$
- Kontserbakorra → E_p, V

I(t)

$I(t)$

$\vec{F}_e \neq \vec{0}$

$\vec{F}_m = \vec{0}$

E_{nc}:
- E lerro itxiak, inguratu $\frac{dB}{dt}$
- $\oint \vec{E}_{nc} \cdot \vec{dl} \neq 0$ → ez kontserbakorra
- $\oint \vec{E}_{nc} \cdot \vec{ds} = 0$

$$\oint (\vec{E}_c + \vec{E}_{nc}) \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{bar}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E}_c \cdot \vec{ds} + \oint \vec{E}_{nc} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{bar}}{\varepsilon_0}$$

! Bigarren atala, ez Coulombiarra, lerro itxiak, [illegible] adierazpen hau ezin [illegible] erabiltzea. Beraz, honek ere Gaussen teorema [illegible] kontutan.

Solenoide batean inguratzen duen espira
($\vec{B}$ aldakorra)

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q}$$

indar elektroeragilea i.e.e

$$\frac{\oint \vec{F}_{nc} \cdot \vec{dl}}{q} = \oint \vec{E}_{nc} \cdot \vec{dl} = E_{nc}\, 2\pi r_2$$

$\vec{E}_{nc} = kte$

$\vec{E}_{nc} \parallel \vec{dl}$

! Espira ingurutik bakarrean, [illegible], ez da i.e.e.-rik agertzen, nahiz eta eremu elektriko induzitua agertuko den, B aldakorra den bitartean.

! Erradioak ez dauka influentziarik i.e.e.-an, konpentsatu egiten baitira haren aldaketak.

$\vec{E}_{nc}$ ($\vec{B}$ [illegible])

I

$\vec{B}$

r_2

espira eroalea

Lorentzen indarraren legea

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}_c + q \cdot \vec{E}_{nc} + q\, \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \oint \frac{\vec{F} \cdot \vec{dl}}{q} = \oint \vec{E}_c \cdot \vec{dl} + \oint \vec{E}_{nc} \cdot \vec{dl} + \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

- $\oint \vec{E}_c \cdot \vec{dl}$: E_c kontserbakorra
- $\oint \vec{E}_{nc} \cdot \vec{dl}$: dB/dt inguratu
- $\oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$: higidurazko i.e.e.

Higiduraren ondoriozko legea

$\odot \vec{B}$, $\vec{v}$, $F_{m,v}$ ⇒ $\vec{v}$, V_d ⇒ $F_{m,v}$, V_d ⇒ E_H, $F_{m,vd}$, F_H

orekan: $F_{m,vd} = q \cdot E_H$ (F_H)

$\vec{E}$, F_e, $F_{m,v}$

orekan: $F_{m,v} = F_e$

$q\, v B = q\, E$

$vB = E$

EL = VBL

! Gainazal itxi batean, fluxu magnetikoa nulua da.

Faraday-ren legea

$$|\mathcal{E}| = \left|\frac{d\phi_B}{dt}\right|$$

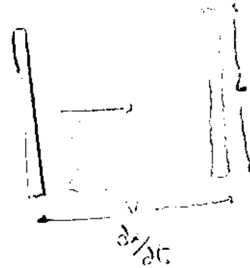
! Ibilbide itxi batean induzitzen den indar elektroeragilea.

$$\phi_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

$$\phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = BS = BLx \qquad \mathcal{E} = \frac{d\phi_B}{dt} = BL\frac{dx}{dt} = BLV$$

$\vec{B} \parallel d\vec{s}$

B = kte



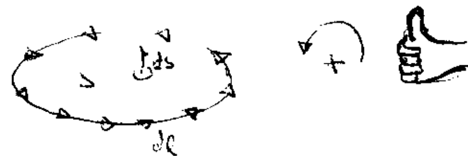
$$I_{ind} = \mathcal{E}/R$$

! Korronte induzitua beti fluxua mantentzen saiatuko da. Aldaketen kontra egingo du beti, inertziala.

Ikurren hitzarmena

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{nc}\cdot d\vec{l} + \oint (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$\oint \vec{E}_{nc}\cdot d\vec{l}$ → $\partial B/\partial t$; $\oint (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$ → higidura



(+) : ⊕ $d\vec{s}$; $\mathcal{E}$ ⊕ ⊖ ; I_{ind} ⊖

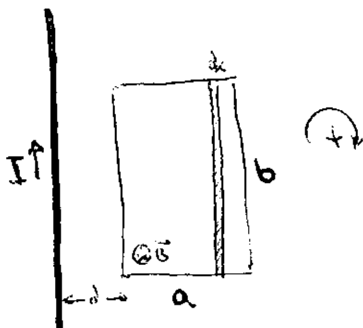
$$\phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = BLx \qquad \frac{d\phi_B}{dt} = BL\frac{dx}{dt} = BLV$$

$\vec{B} \parallel d\vec{s}$, B = kte

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -BLV \quad , \quad I_{ind} = -\frac{BLV}{R}$$

! Eremu elektrikoa egoteko ez dago eroale baten beharrik. Induzitua prozesua dela eta puntu ezberdinetan izango dugu eremua. Korrontea izateko, aldiz, espira bat behar dugu, ibilbide itxi bat sortarazteko.

Hari batetik sortu dagoen espira



(+)

$$\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\cdot \frac{b\,dx}{ds} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\int_d^{d+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}[\ln x]_d^{d+a}$$

$\vec{B} \parallel d\vec{s}$

$\vec{B} \neq$ kte

$$\phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}[\ln(d+a) - \ln d] = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

! Espira geldirik badago eta korrontea konstantea bada, $\mathcal{E} = 0$ izango dugu.

	Iturria	fem	Indarra	Potentziala
E_c	q	kontserbakorra $\mathcal{E} = 0$ ... $= 0$	$q\,E_c$	definitu daiteke
E_{nc}	$\partial B/\partial t$	ez kontserbakorra $\oint \vec{E}_{nc}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$ ... $\neq 0$	$q\cdot E_{nc}$	∅
$\vec{v}\times\vec{B}$	eroalea, $\vec{v}$, $\vec{B}$	ez kontserbakorra $\oint (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$ ... $\neq 0$	$q(\vec{v}\times\vec{B})$	∅